Congresso di Firenze 1908

Prima Parte

Princ. d. rel.

L'Elettrodinamica del Maxwell non s'accorda con le esperienze

L'allontanarsi degli elettroni dalle leggi della Meccanica non è sufficientemente spiegato dall'ipotesi della massa elettromagnetica d'altra parte

L'esperienze di Fizeau e di Michelson hanno dimostrato che l'etere non prende parte se non in piccole proporzioni al moto dei corpi materiali eppure tutte le altre esperienze per rivelare il moto della terra non sono riuscite.

ipotesi del Lorentz — Kaufmann

di qui il Princ. d. relatività

si convertono

Trasf. d. Lorentz

Equivalenza di due sistemi

Trasf. $x' = k l (x + qt)$ $\quad t' = k l (t + qx)$ $\quad k = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$

Minkowski $r'_v = \frac{r_v - qt}{\sqrt{1-q^2}}$ $\quad r'_{\bar v} = r_{\bar v}$ $\quad t' = \frac{-q r_v + t}{\sqrt{1-q^2}}$ $\quad |v| = q$, $0 < q < 1$

trasf. speciale del Lorentz

Einstein und Laub

Conc. d. tempo

~~Si spengono due~~

Defin. del tempo — si riduce a contempor. di 2 fenom.

tempo locale — Sincronismo in un sistema in quiete

si pongono 2 princ. come postulati

Effetto del moto nella misura di una sbarra e spaz.

effetto nel tempo $t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$ $\quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V - v}$

Einstein ne deduce immediat. la trasform. del Lorentz

Dalla trasformaz. segue la Contraz. nel senso del moto

Una sfera diventa un elissoide di assi $R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$, R, R

Anche i tempi subiscono una contraz.

$$t' = t - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2 t$$ ossia $\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2$ per sec.

Seconda Parte

I 2 problemi fondamentali della dinamica

Primo problema

Lavori dell' Abraham sui moti quasi stazionari

Soluz. completa del Sommerfeld

Secondo problema

Moti spontanei Eigenschwingungen Herglotz. Somm

Risultati del Sommerfeld sul problem gener

Enunciati : Moto con vel. > richiede forza

Carica di vel. posit. vel >

Car. sup. no

limite superiore $\dfrac{9e^2}{16\pi a^2}$

caso di caduta della velocità

Importanza degli studi dell' Herts – Moto trasl. rettilineo

Curva storia del moto – proprietà della curva

un sol valore per y – tang. trigon – retta a 45°

posiz. del problema : data una storia del moto fino ad un certo istante e da quel punto la forza in f. d. temp

limitaz. per la forza

Teorema di esistenza ed unicità

$$K = m \int A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy \qquad K = m\int [A + By']\,dx$$

$$K = m \int E\,d\sigma \qquad E = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}$$

il teorema richiede che non sia nullo l'integral $a_0 = \int_{V_0} E\,dx$

Ipotesi di velocità infinitamente piccole

importanza del lato matematico

Forma generale del problema

$$F(t) = \varphi(t) - \int N(t,\vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$$

φ è la curva del moto che è nota fino ad un certo istante e poi si cerca

F è la forza $\vartheta = t - x$

N è conosciuta per A e B

1° caso un sol limite variabile ossia $\int_{t_0}^{t}$ t_0 essendo una costante e $t > t_0$

$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{N}(t,\vartheta)\,F(\vartheta)\,d\vartheta$$

a questo si riconduce il caso che il moto sia noto da un tempo t_0 avanti il quale era in quiete ossia $\varphi = 0$

2° caso due limiti variabili ossia $\int_{t-\gamma}^{t}$ dove γ è una cost. positiva (p. el. = 2)

$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0-\gamma}^{t_0} \varphi(\vartheta)\,d\vartheta\ \overline{N}(t,\vartheta) + \int_{t_0}^{t} F(\vartheta)\,d\vartheta\ \underline{N}(t,\vartheta)$$

il 1° integr. contiene φ ma nell' intervallo conosciuto

Si può applicare agli elettroni e si arriva a trovare una serie di soluzioni dalle quali per sovrappos. si può ricavare la soluz. generale.

Congresso di Firenze 1908

1. Il Principio della Relatività

Lo studio dei fenomeni della radiattività, dei raggi catodici, dei raggi canali ci ha condotto alla conoscenza di fatti nuovi che per una parte non sarebbero stati prevedibili con le conoscenze ordinarie che avevamo di fenomeni elettrostatici ed elettrodinamici e per l'altra non si accordano coi principii che la Meccanica assegna per il moto dei corpi. Quando si voglia applicare ai corpi in moto le teorie elettrodinamiche di Maxwell si arriva a risultati che non s'accordano abbastanza con le esperienze e dall'altro lato il principio d'inerzia, quello della costanza della massa e dell'eguaglianza fra azione e reazione restano profondamente modificati quando si studia il moto di quei corpuscoli che costituiscono una gran parte dei raggi emanati da un corpo radioattivo e i fasci uscenti dal catodo di un tubo Crookes e che chiamiamo elettroni.

30

Le ipotesi

La conoscenza che abbiamo e che ci viene fornita dalle esperienze sulla natura di essi spiega solo in parte questi fatti. Si dovrà cercare la spiegazione degli altri nel moto degli elettroni stessi. E poichè sappiamo che si muovono con velocità estremamente grandi rispetto a quelle che sogliamo riscontrare negli altri corpi di cui studiamo il moto, congiungendo insieme la speciale natura dei corpi in questione e la loro singolare velocità potrà darsi una spiegazione sufficiente dell'allontarsi che essi fanno dalle leggi note della Meccanica.

Ma insieme a questi un'altra serie di fatti si presenta che chiede anch'essa una spiegazione. È noto come lo studio dell'aberrazione della luce abbia condotto a ricercare se l'etere prenda parte ai movimenti dei corpi ~~meccanici~~ ponderabili e le esperienze han dimostrato che ~~l'etere~~ non vi partecipa se non in minima parte. Quando però si è voluto ~~[illegible]~~ rivelare il moto della terra rispetto all'etere ambiente

tutte le ricerche in proposito hanno dato risul-
tati negativi. L'ipotesi del Lorentz della contra-
zione dei corpi nel senso del loro moto dà
la ragione di questo risultato: la stessa ipotesi
Kaufmann applicata agli elettroni spiega completamente
quanto rimaneva di incognito nello studio dei feno-
meni ~~po~~ che si verificano nel loro moto.

Quest'effetto del moto adunque che per una parte
si converte con l'impossibilità di mettere in evi-
denza il moto della terra rispetto all'etere, e per
l'altra è causa di tutti quei fenomeni elettrodi-
namici che l'esperienze ci hanno rivelato quando
si congiunga con le altre proprietà che conosciamo
degli elettroni, cioè la loro massa di origine elet-
tromagnetica, viene a costituire un principio
fondamentale dell'elettrodinamica.

L'ipotesi del Lorentz spiega dunque il fatto della impossibilità di mettere in evidenza il moto della terra relativamente all'etere che è la sede dei fenomeni luminosi. Questa ipotesi si converte dunque in un principio che può enunciarsi così: i mezzi di cui possiamo disporre non ci permettono di discoprire per i corpi altri moti che quelli che essi posseggono relativamente ad altri corpi materiali; o in altri termini: tutti i fenomeni che possiamo osservare e le leggi che li reggono non sono ~~indipendenti~~ alterati da un moto traslatorio dell'insieme. Questo enunciato prende il nome di <u>Principio della Relatività</u>.

2. Le trasformazioni di Lorentz

Ne segue immediatamente che due sistemi uno in quiete l'altro in moto traslatorio uniforme sono tali che l'uno può essere l'immagine dell'altro. Se dunque avremo un sistema d'equazioni che ci definiscano il modo di variare di un insieme di punti fisici, sottoponendo questo sistema ad una trasformazione di variabili capace di rappresentare un moto uniforme l'espressione delle equazioni date non verrà alterata da quella trasformazione. Una trasformazione di questo genere è stata chiamata dal Poincaré <u>trasformazione di Lorentz</u>. Il principio della Relatività viene dunque ad esprimersi in linguaggio matematico come una Covarianza di quelle equazioni per una conveniente trasformazione delle variabili di spazio e di tempo che vi compaiono. Il Poincaré (1) dimostra che tutte le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo. ~~Una~~ In generale una trasformazione di Lorentz può essere rappresentata così

$$x' = kl(x + qt)$$
$$y' = ly$$
$$z' = lz$$
$$t' = kl(t + qx)$$

in cui $\underline{l}$ e $\underline{q}$ sono due costanti e $k = \dfrac{1}{\sqrt{1-q^2}}$

---

(1) Poincaré. Sur la dinamique de l'Electron - Rend. d. Circ. Mat. di Palermo vol XXI 1906 § 4.

Nei ~~casi~~ fenomeni che ci interessano q è il rapporto $\frac{v}{V}$ della velocità dell'elettrone o in generale del corpo alla velocità della luce, l è una funzione della velocità v e si può dimostrare dover prendere la forma $l = 1$.

Il Minkowski[1] mostra che la trasformazione di Lorentz può ridursi ad una rotazione intorno ad un asse determinato passante per l'origine. In particolare può definirsi una trasformazione dando un vettore la cui direzione sia l'asse della rotazione e che ~~[illegible]~~ in grandezza ~~[illegible]~~ ne rappresenti il momento. Sia per esempio il vettore $\mathbf{v}$ con le componenti v_x v_y v_z. Se per brevità si rappresenta con $\mathbf{r}$ il vettore di componenti x y z, e con $\mathbf{r}'$ quello le cui componenti sono x' y' z' e con r_v ed $r_{\bar{v}}$ si indicano le componenti di r lungo la direzione di v e lungo la direzione ~~qual~~ qualunque normale a v, allora

(1) Minkowski. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Nach. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen

le 3 espressioni

$$r'_v = \frac{r_v - qt}{\sqrt{1-q^2}}$$

$$r'_{\bar v} = r_{\bar v}$$ per qualunque direzione $\bar v$ normale a v purchè corrispondenti nei due sistemi

e

$$t' = \frac{-q r_v + t}{\sqrt{1-q^2}}$$

definiscono ciò che il Minkowski chiama una <u>trasformazione speciale del Lorentz</u> ~~[illegible]~~ definita dal vettore $\mathbf{v}$, purchè sia

$$|\mathbf{v}| = q$$

e

$$0 < q < 1$$

Una trasformazione di questo genere permette al Minkowski di dare le equazioni fondamentali per i corpi in moto sotto una forma più generale che non sia quella del Lorentz e che comprende tutti i casi possibili di corpi cioè magnetizzati o no, ed anche come caso limite l'equazioni per l'etere.

Date le equazioni che valgono per tutti i casi corrispondenti per i corpi in quiete, e ammettendo come postulato che la velocità della materia sia sempre minore di quella della luce il vettore che definisce la trasformazione speciale del Lorentz sarà il vettore stesso che dà la velocità della materia, e si verificherà che $|v| = q$ è compreso fra 0 ed 1 purchè si prenda sempre come eguale ad 1 la velocità della luce.

~~Ma~~ Il lavoro del Minkowski si presenta per altro sotto un complesso apparato matematico. Recentemente i sigg. Einstein e Laub [1] hanno dedotto le equazioni del Minkowski in un modo molto elementare partendo direttamente dalle leggi dell'elettrodinamica dei corpi in quiete stabilite dalle equazioni di Maxwell-Hertz.

(1) Einstein u. J. Laub - Ueber die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper Ann. d. Phys 1908 H. 8

3. Il Concetto di tempo

È merito dell'Einstein (1) l'aver mostrato come il principio della Relatività si converte con un nuovo concetto del tempo che dobbiamo introdurre nei nostri ragionamenti, o meglio con una modificazione che dobbiamo apportare all'idea che abbiamo della contemporaneità di due fenomeni.

Sappiamo che il tempo si definisce giustamente come la misura del moto. In pratica però abbiamo bisogno di ricorrere ad un moto per misurare il tempo. Cosicchè per misurare un moto ci serviamo in realtà di un altro moto al quale paragoniamo il primo. Il tempo quindi si riduce alla contemporaneità fra due fenomeni che sono la posizione della sfera di un orologio e il fenomeno che si considera. In questo modo però possiamo misurare il tempo solo per quei fenomeni che avvengono nello spazio che immediatamente circonda

(1) Einstein A. Zur elektrodynamik bewegter Körper Ann. der Ph. 17 1905 p. 891

l'orologio. Per punti lontani dovremo ricorrere ad altri orologi in modo che dovunque sia da misurare un tempo lì sia un orologio. Ma allora si capisce che avremo altrettanti tempi locali quanti punti da misurare. Potremmo tentare di far sì che tutti questi orologi siano sincroni ma non vi potremo riuscire se non quando fossimo in uno spazio isotropo ed omogeneo per rispetto alla luce o a qualunque altro segnale che potessimo inviare da un punto all'altro. Per un tale spazio o in generale per un sistema in quiete si potrà ottenere il sincronismo tra due punti operando così. Siano due punti A e B lontani fra loro. Ad un istante t_A del tempo locale di A inviamo un raggio di luce verso B. Il raggio giungerà in B ad un ~~tempo~~ istante t_B del tempo locale di B. Se poi in B è uno specchio il raggio potrà rinviarsi su A dove giungerà ad un istante t'_A. Allora i due orologi saranno sincroni se

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

Vediamo come dovremo modificare questi concetti quando il sistema non è più in quiete. Per far ciò dovremo supporre che le leggi secondo le quali varia lo stato dei sistemi fisici sono indipendenti dal fatto che le variazioni stesse vengano riferite all'uno o all'altro di due sistemi di cui uno sia in moto traslatorio uniforme per rispetto all'altro; in altri termini dovremo supporre il Principio della relatività. Cominciamo allora dal proporci il problema di misurare la lunghezza di un asta in moto. Immaginiamo l'asta disposta sopra l'asse x di un sistema k di coordinate la cui origine si muova con moto ~~uniforme~~ rettilineo con velocità costante v per rispetto ad un altro sistema K che è in quiete e per fissar le idee si muova nel senso e nella direzione delle x crescenti di K. La lunghezza dell'asta in quiete misurata nel sistema K ~~fatta~~ con un'asta campione della stessa natura di quella da misurare sia data da l. Per misurare l'asta mentre essa si muove col sistema k mantenendo in esso una posizione costante si può procedere in due modi:

a) l'osservatore si muove anch'esso col sistema k e applica il campione sull'asta come se eseguisse la stessa operazione nel sistema in quiete

b) l'osservatore determina ad un certo istante la posizione che occupano i due punti estremi dell'asta per rispetto al sistema in quiete e misura poi col campione in quiete la distanza fra quei due punti. Quelle due posizioni potranno esser determinati contemporaneamente perchè in un sistema in quiete sappiamo definire il sincronismo.

I risultati delle due misure non possono esser identici per i principii che abbiamo ammesso. Le lunghezze dunque non si conservano.

Ma non si conservano neppure i tempi. Infatti se ripetiamo per i due punti estremi dell'asta le operazioni fatte per stabilire il sincronismo fra i due punti A e B otteniamo

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V-v} \qquad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V-v}$$

dove V è la velocità della luce ed r_{AB} è la distanza fra i punti A e B estremi dell'asta, misurata con la stessa operazione nelle due eguaglianze. Quei tempi non ~~sono più~~ possono essere eguali. poichè ammettiamo la costanza della velocità della luce sia che esca da un corpo in quiete o da uno in moto. Sicchè mentre un osservatore in un sistema in quiete giudicherebbe sincroni i due orologi posti in A e in B, nel sistema in moto non sono sincroni.

Il concetto di contemporaneità non ha dunque un significato assoluto: due fenomeni che sono contemporanei considerati rispetto ad un sistema di coordinate, non lo sono più se si considerano ~~rispetto ad~~ in un sistema che rispetto al primo è in moto.

L'Einstein con un procedimento molto elegante mostra come si possa, fondandosi su questo principio della contemporaneità, determinare le relazioni che devono passare fra le variabili x, y, z, t del sistema $\underline{K}$ e quelle x', y', z', t' del sistema $\underline{k}$.

Queste relazioni sono niente altro che le equazioni che definiscono la trasformazione di Lorentz.

Volendo poi risalire da questo punto alla prima ipotesi della contrazione il cammino è molto rapido. Se l'equazione

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$$

che rappresenta una sfera di raggio R nel sistema $\underline{k}$ si trasforma per mezzo delle relazioni trovate fra le x', y', z', t' e le x, y, z, t si ottiene nel sistema K l'equazione

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} + y^2 + z^2 = R^2$$

che rappresenta un elissoide di rotazione i cui assi sono $R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$, R, R

Il corpo dunque ha subito una contrazione e precisamente nel senso del moto che abbiamo supposto essere secondo l'asse x

Così il Principio della Relatività ha suggerito una modificazione da introdursi nel concetto di contemporaneità di fenomeni. Questa ci ha fornito il modo di giungere a porre le relazioni che legano fra loro le coordinate cartesiane di un sistema determinato e il tempo con le grandezze corrispondenti in un sistema che per rispetto al primo è in un moto uniforme rettilineo; queste relazioni finalmente ci hanno rivelato una contrazione che i corpi in moto subiscono nel senso del moto stesso.

È facile mostrare, e si prevede anzi come non soltanto le lunghezze ma anche i tempi subiscono una contrazione nel senso del moto. Se si vuole infatti esprimere il tempo t' in funzione della sola variabile t si ottiene

$$t' = t - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right) t$$

ossia con sufficiente approssimazione

$$t' = t - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2 t$$

Ogni secondo subisce quindi un ritardo e direi quasi una contrazione misurata dal fattore $\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2$.